

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Матвієнко М. П.**

## **ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України як навчальний посібник  
для студентів вищих навчальних закладів*



Київ-2017

ББК 32.973  
УДК 004.38  
М 33

*Копіювання, сканування, запис на електронні носії і тому подібне, будь-якої частини посібника без дозволу видавництва заборонено*

#### **Рецензенти:**

*В.П. Малюков* – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних систем та технологій Європейського університету;  
*В.М. Чермалих* – доктор технічних наук, професор кафедри автоматизації управління електротехнічними комплексами НТУУ «КПІ»;  
*М.М. Проценко* – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних систем і мереж Національного авіаційного університету, м. Київ.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України №1/11-6538 від 22.07.2011 р.)*

М 33      **Матвієнко М. П. Теорія алгоритмів.** Навчальний посібник. — К.: Видавництво Ліра-К, 2017. — 340 с.  
ISBN 978-966-2609-34-9

Навчальний посібник складається з двох частин. У першій частині розглянуто теоретичні основи побудови, математичного аналізу, складності і порівняння алгоритмів, їхні математичні моделі, а друга частина присвячена розгляду і побудові більше ніж 60 різних нормальних та операторних алгоритмів, алгоритмів сортування, алгоритмів на звичайних графах, орграфах і деревах, алгоритмів кодування та стиснення інформації, алгоритмів кластеризації, криптографічних та генетичних. Робота кожного алгоритму розглянута на конкретному прикладі для набуття читачем практичного досвіду.

Навчальний посібник призначено для студентів, аспірантів та спеціалістів, які використовують відповідні знання з теорії алгоритмів і самі алгоритми.

**ББК 32.973**  
**УДК 004.38**

ISBN 978-966-2609-34-9

© Матвієнко М. П., 2013  
© «Видавництво Ліра-К», 2014



Передмова .....	10
-----------------	----

## **ЧАСТИНА I**

<b>Розділ 1. ПОНЯТТЯ, ВЛАСТИВОСТІ ТА СПОСОБИ ЗАДАННЯ АЛГОРИТМІВ .....</b>	<b>12</b>
-------------------------------------------------------------------------------	-----------

1.1. Поняття про алгоритми .....	12
1.2. Властивості алгоритмів .....	17
1.3. Способи задання алгоритмів .....	20
Контрольні запитання .....	26
Задачі для самостійного розв'язування .....	26
Коментарі .....	27

<b>Розділ 2. МАТЕМАТИЧНІ ТА ГРАФІЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ .....</b>	<b>28</b>
------------------------------------------------------------------------------	-----------

2.1. Абстрактний аналіз алгоритмів .....	28
2.2. Арифметичні визначення операцій .....	29
2.3. Застосування суми та її властивості .....	31
2.4. Визначення швидкості зростання функції .....	33
2.5. Застосування рекурентних співвідношень .....	35
2.6. Основні визначення графів та дерев .....	36
Контрольні запитання .....	41
Задачі для самостійного розв'язування .....	42
Коментарі .....	43

<b>Розділ 3. СКЛАДНІСТЬ АЛГОРИТМІВ ТА ЇХНІ КЛАСИ СКЛАДНОСТІ .....</b>	<b>44</b>
---------------------------------------------------------------------------	-----------

3.1. Основні визначення .....	44
3.2. Визначення складності алгоритмів .....	46
3.3. Класи складності алгоритмів .....	50
Контрольні запитання .....	57

Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	58
Коментарі . . . . .	59
<b>Розділ 4. АЛГОРИТМИ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ФУНКЦІЇ . . .</b>	<b>60</b>
4.1. Загальні визначення . . . . .	60
4.2. Примітивно рекурсивні функції . . . . .	61
4.3. Частково рекурсивні функції . . . . .	68
4.4. Теза Черча . . . . .	71
Контрольні запитання . . . . .	72
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	73
Коментарі . . . . .	74
<b>Розділ 5. НУМЕРАЦІЇ . . . . .</b>	<b>75</b>
5.1. Нумерація множин натуральних чисел . . . . .	75
5.2. Нумерація множин обчислювальних функцій . . . . .	80
5.3. Канторівська нумерація пар натуральних чисел . . . . .	81
Контрольні запитання . . . . .	83
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	83
Коментарі . . . . .	83
<b>Розділ 6. АЛГОРИТМІЧНІ МОДЕЛІ . . . . .</b>	<b>84</b>
6.1. Основні визначення . . . . .	84
6.2. Машини Тьюрінга . . . . .	85
Контрольні запитання . . . . .	90
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	90
Коментарі . . . . .	90

## **ЧАСТИНА II**

<b>Розділ 7. НОРМАЛЬНІ ТА ОПЕРАТОРНІ АЛГОРИТМИ . . . . .</b>	<b>91</b>
7.1. Нормальні алгоритми А.А. Маркова . . . . .	91
7.2. Операторні алгоритми Ван Хао . . . . .	97
7.3. Операторні алгоритми А.А. Ляпунова . . . . .	100
Контрольні запитання . . . . .	103
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	103
Коментарі . . . . .	104
<b>Розділ 8. АЛГОРИТМИ СОРТУВАННЯ . . . . .</b>	<b>105</b>
8.1. Сортування вибором . . . . .	105
8.2. Бульбашкове сортування . . . . .	108
8.3. Швидке сортування . . . . .	112

8.4. Сортування злиттям . . . . .	113
8.5. Сортування вставками . . . . .	116
Контрольні запитання . . . . .	117
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	117
Коментарі . . . . .	117

## **АЛГОРИТМИ НА ЗВИЧАЙНИХ ГРАФАХ**

### **Розділ 9. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ ОСТОВНИХ ДЕРЕВ . . . . . 118**

9.1. Алгоритм пошуку остовного дерева в глибину . . . . .	118
9.2. Алгоритм пошуку остовного дерева в ширину . . . . .	122
9.3. Алгоритм пошуку максимальної кількості остовних дерев . . . . .	124
Контрольні запитання . . . . .	126
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	126
Коментарі . . . . .	126

### **Розділ 10. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ МІНІМАЛНИХ ОСТОВНИХ ДЕРЕВ . . . . . 127**

10.1. Алгоритм Крускала . . . . .	127
10.2. Алгоритм Борувки . . . . .	129
10.3. Звичайний алгоритм Прима . . . . .	130
10.4. Матричний алгоритм Прима . . . . .	132
Контрольні запитання . . . . .	137
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	137
Коментарі . . . . .	137

### **Розділ 11. АЛГОРИТМИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОСТОВНИХ ДЕРЕВ . . . . . 138**

11.1. Алгоритм перетворення остовного дерева на послідовність чисел . . . . .	138
11.2. Алгоритм перетворення послідовності чисел на остовне дерево . . . . .	140
Контрольні запитання . . . . .	145
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	145
Коментарі . . . . .	145

### **Розділ 12. АЛГОРИТМИ НА БІНАРНИХ ДЕРЕВАХ . . . . . 146**

12.1. Загальні визначення . . . . .	146
12.2. Алгоритми обходу бінарних дерев . . . . .	147
12.3. Алгоритм перевірки на ізоморфність бінарних дерев . . . . .	150

Контрольні запитання . . . . .	152
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	152
Коментарі . . . . .	152
<b>Розділ 13. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ . . . . .</b>	<b>153</b>
13.1. Алгоритм Данцінга . . . . .	153
13.2. Звичайний алгоритм Дейкстри . . . . .	156
13.3. Матричний алгоритм Дейкстри . . . . .	160
13.4. Алгоритм Флойда–Уоршола . . . . .	168
Контрольні запитання . . . . .	171
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	171
Коментарі . . . . .	172
<b>Розділ 14. АЛГОРИТМИ НА ДВОДОЛЬНИХ ГРАФАХ . . . . .</b>	<b>173</b>
14.1. Алгоритм побудови максимального паросполучення . . . . .	173
14.2. Алгоритм побудови досконалого паросполучення мінімальної ваги . . . . .	175
Контрольні запитання . . . . .	183
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	183
Коментарі . . . . .	184
<b>Розділ 15. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ КОМПОНЕНТ ДВОЗВ'ЯЗНОСТІ, ВЕРШИН ЗЧЛЕНУВАННЯ ТА ДІАМЕТРА ГРАФА . . . . .</b>	<b>185</b>
15.1. Алгоритм пошуку компонент двозв'язності та вершин зчленування . . . . .	185
15.2. Алгоритми пошуку діаметра графа . . . . .	188
Контрольні запитання . . . . .	189
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	190
Коментарі . . . . .	190
<b>АЛГОРИТМИ НА ОРГРАФАХ</b>	
<b>Розділ 16. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ ОСТОВНИХ ДЕРЕВ І ЦИКЛІВ . . . . .</b>	<b>191</b>
16.1. Загальні визначення . . . . .	191
16.2. Алгоритм пошуку остовного дерева у глибину . . . . .	193
16.3. Алгоритм пошуку циклів . . . . .	197
Контрольні запитання . . . . .	199

Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	200
Коментарі . . . . .	200
<b>Розділ 17. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ СИЛЬНИХ</b>	
<b>КОМПОНЕНТ . . . . .</b>	<b>201</b>
17.1. Алгоритм Тар'яна . . . . .	201
17.2. Алгоритм Косарайю . . . . .	203
Контрольні запитання . . . . .	206
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	206
Коментарі . . . . .	207
<b>Розділ 18. АЛГОРИТМИ ПОШУКУ НАЙКОРОТШИХ</b>	
<b>ШЛЯХІВ . . . . .</b>	<b>208</b>
18.1. Алгоритм Дейкстри . . . . .	208
18.2. Алгоритм Флойда для знаходження найкоротших	
шляхів між усіма парами вершин з визначенням їхніх	
маршрутів . . . . .	210
Контрольні запитання . . . . .	214
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	215
Коментарі . . . . .	215
<b>Розділ 19. АЛГОРИТМИ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАКОРОЧЕННЯ</b>	<b>216</b>
19.1. Алгоритм з використанням логічної матриці	
суміжності . . . . .	216
19.2. Алгоритм Уоршолла . . . . .	219
Контрольні запитання . . . . .	223
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	223
Коментарі . . . . .	223
<b>Розділ 20. АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ МЕРЕЖ І ПОТОКІВ . . . . .</b>	<b>224</b>
20.1. Загальні визначення . . . . .	224
20.2. Алгоритм Прима для побудови мереж мінімальної	
довжини . . . . .	225
20.3. Алгоритм Форда–Фалкерсона для знаходження	
максимального потоку . . . . .	228
20.4. Алгоритм пошуку заданого потоку мінімальної вартості	235
20.5. Алгоритм розподілу пропускної властивості дуг	
за критерієм заданого потоку при мінімальних затратах	238

20.6. Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі за критерієм заданого рівня його сумарних затрат . . . . .	240
Контрольні запитання . . . . .	244
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	244
Коментарі . . . . .	245
<b>Розділ 21. АЛГОРИТМИ КОДУВАННЯ . . . . .</b>	<b>246</b>
21.1. Алгоритми оптимального кодування . . . . .	246
21.2. Алгоритми завадостійкого кодування . . . . .	252
Контрольні запитання . . . . .	263
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	263
Коментарі . . . . .	264
<b>Розділ 22. АЛГОРИТМИ СТИСНЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ . . . . .</b>	<b>265</b>
22.1. Алгоритми стиснення інформації при передаванні . . . . .	265
22.2. Алгоритми стиснення інформації при архівації . . . . .	274
Контрольні запитання . . . . .	277
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	277
Коментарі . . . . .	278
<b>Розділ 23. КРИПТОГРАФІЧНІ АЛГОРИТМИ . . . . .</b>	<b>279</b>
23.1. Загальні визначення . . . . .	279
23.2. DES алгоритм . . . . .	283
23.3. RSA алгоритм . . . . .	291
23.4. Алгоритм Ель Гамаля . . . . .	299
23.5. Алгоритм Рабіна . . . . .	301
23.6. Алгоритм Діффі–Хеллмана . . . . .	303
23.7. Алгоритм Поліга–Хеллмана . . . . .	305
Контрольні запитання . . . . .	305
Задачі для самостійного розв'язування . . . . .	306
Коментарі . . . . .	306
<b>Розділ 24. АЛГОРИТМИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ . . . . .</b>	<b>307</b>
24.1. Основні відомості та завдання кластеризації . . . . .	307
24.2. Класифікація алгоритмів . . . . .	310
24.3. Ієрархічні алгоритми . . . . .	311
24.4. Неієрархічні алгоритми . . . . .	314
Контрольні запитання . . . . .	321
Коментарі . . . . .	321



<b>Розділ 25. ЕВОЛЮЦІЙНІ ТА ГЕНЕТИЧНІ АЛГОРИТМИ . . .</b>	<b>322</b>
25.1. Основні визначення . . . . .	322
25.2. Структура та оператори генетичних алгоритмів . . . . .	324
25.3. Еволюційний алгоритм . . . . .	327
25.4. Базовий генетичний алгоритм . . . . .	327
25.5. Послідовні модифікації базового генетичного алгоритму	328
25.6. Паралельні модифікації базового генетичного алгоритму	330
25.7. Особливості генетичних алгоритмів, передумови для їхньої адаптації . . . . .	333
25.8. Застосування генетичних алгоритмів . . . . .	335
Контрольні запитання . . . . .	336
Коментарі . . . . .	336
Література . . . . .	337